ΠΑΝΕΛΛΑΔΙΚΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ
ΗΜΕΡΗΣΙΩΝ & ΕΣΠΕΡΙΝΩΝ ΓΕΝΙΚΩΝ ΛΥΚΕΙΩΝ
ΔΕΥΤΕΡΑ 19 ΙΟΥΝΙΟΥ 2017
ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ:
ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ & ΣΤΟΙΧΕΙΑ ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗΣ ΓΕΝΙΚΗΣ ΠΑΙΔΕΙΑΣ

(Ενδεικτικές Απαντήσεις)

ΘΕΜΑ Α

Α1. Απόδειξη σχολικού βιβλίου σελίδα 31

Α2. Ορισμός σελίδα 14 (προσοχή μόνο το ***τοπικό μέγιστο***)

Α3. Σελίδα 72 σχολικού βιβλίου

Α4.

α) Σωστό

β) Λάθος

γ) Λάθος

δ) Σωστό

ε) Λάθος

ΘΕΜΑ Β

Β1. (α) Για την εύρεση της μέσης τιμής κατασκευάζουμε μια επιπλέον στήλη η οποία περιέχει τα γινόμενα $x_i \cdot v_i$ όπως φαίνεται παρακάτω :

x_i	v_i	$x_i \cdot v_i$
1	2	2
3	3	9
5	4	20
9	1	9
Σύνολο	10	40

Επομένως $\overline{x} = \dfrac{\sum_{i=1}^{4} x_i \cdot v_i}{v} \Leftrightarrow \overline{x} = \dfrac{40}{10} \Leftrightarrow \overline{x} = 4$

(β) Έχουμε συνολικά 10 παρατηρήσεις (άρτιος) επομένως η διάμεσος είναι :

$$\delta = \frac{5^{\eta}\,\pi\alpha\rho\alpha\tau\acute{\eta}\rho\eta\sigma\eta + 6^{\eta}\,\pi\alpha\rho\alpha\tau\acute{\eta}\rho\eta\sigma\eta}{2}$$

Κατασκευάζοντας στον αρχικό πίνακα την στήλη της αθροιστικής συχνότητας

x_i	v_i	N_i
1	2	2
3	3	5
5	4	9
9	1	10
Σύνολο	40	

προκύπτει ότι η 5^{η} παρατήρηση είναι ο αριθμός **3** ενώ η 6^{η} παρατήρηση είναι ο αριθμός **5** άρα :

$$\delta = \frac{3+5}{2} \Leftrightarrow \delta = 4$$

(γ) Για τη εύρεση της διακύμανσης κατασκευάζουμε τις παρακάτω στήλες για να εφαρμόσουμε τον τύπο : $s^2 = \dfrac{\sum_{i=1}^{4} \left(x_i - \overline{x}\right)^2 \cdot v_i}{v}$, επομένως έχουμε :

x_i	v_i	$x_i - \overline{x}$	$\left(x_i - \overline{x}\right)^2$	$\left(x_i - \overline{x}\right)^2 \cdot v_i$
1	2	-3	9	18
3	3	-1	1	3
5	4	1	1	4
9	1	5	25	25
Σύνολο	10			50

Ισχύει :

$$s^2 = \frac{\sum_{i=1}^{4}\left(x_i - \bar{x}\right)^2 \cdot v_i}{v} \Leftrightarrow s^2 = \frac{50}{10} \Leftrightarrow s^2 = 5$$

Β2. Για να εξετάσουμε αν το δείγμα είναι ομοιογενές αρκεί να βρούμε το συντελεστή μεταβολής CV .

$$CV = \frac{s}{|\bar{x}|} = \frac{\sqrt{5}}{4} = \frac{25\sqrt{5}}{100} > \frac{10}{100}$$ άρα το δείγμα δεν είναι ομοιογενές .

Όπου: $s = \sqrt{s^2} = \sqrt{5}$

ΘΕΜΑ Γ

Γ1. Η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ με παράγωγο

$$f'(x) = \left(x^2 - x + 1\right)' \Leftrightarrow f'(x) = 2x - 1$$

Βρίσκουμε τις ρίζες και το πρόσημο της f'

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow 2x - 1 = 0 \Leftrightarrow 2x = 1 \Leftrightarrow x = \frac{1}{2}$$

$$f'(x) > 0 \Leftrightarrow 2x - 1 > 0 \Leftrightarrow 2x > 1 \Leftrightarrow x > \frac{1}{2}$$

$$f'(x) < 0 \Leftrightarrow 2x - 1 < 0 \Leftrightarrow 2x < 1 \Leftrightarrow x < \frac{1}{2}$$

Το πρόσημο της f' και τα διαστήματα μονοτονίας της f φαίνονται στον παρακάτω πίνακα :

x	$-\infty$	$\frac{1}{2}$ $+\infty$
$f'(x)$	-	+
f	↘	↗

Στο διάστημα $\left(-\infty, \frac{1}{2}\right]$ η f είναι γνησίως φθίνουσα ενώ στο διάστημα $\left[\frac{1}{2}, +\infty\right)$ είναι γνησίως αύξουσα .

Για $x=\frac{1}{2}$ η f παρουσιάζει τοπικό ελάχιστο με τιμή

$$f\left(\frac{1}{2}\right)=\left(\frac{1}{2}\right)^2-\frac{1}{2}+1 \Leftrightarrow f\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{3}{4}$$

Γ2. Το σημείο $A(2,f(2))$ είναι το $A(2,3)$ διότι το $f(2)=2^2-2+1 \Leftrightarrow f(2)=3$

Ο συντελεστής διεύθυνσης της εξίσωσης εφαπτομένης της f στο A είναι

$$\lambda=f'(2) \Leftrightarrow \lambda=3$$

Έστω $(\varepsilon): y=\lambda x+\beta$ η εξίσωση εφαπτομένης της f στο A, τότε εφόσον το σημείο A ανήκει στην (ε) οι συντεταγμένες του την επαληθεύουν επομένως :

$$3=3\cdot 2+\beta \Leftrightarrow \beta=-3$$

άρα η εξίσωση εφαπτομένης είναι

$$(\varepsilon): y=3x-3$$

Γ3. Για να βρω τα σημεία τομής της (ε) με το άξονα $x'x$ λύνουμε την εξίσωση

$y=0 \Leftrightarrow 3x-3=0 \Leftrightarrow 3x=3 \Leftrightarrow x=1$, επομένως η (ε) τέμνει τον άξονα $x'x$

στο σημείο $B(1,0)$.

Για να βρω τα σημεία τομής της (ε) με το άξονα $y'y$ αντικαθιστούμε $x=0$ στην εξίσωση της (ε) οπότε : $y=-3$ άρα η (ε) τέμνει τον άξονα $y'y$ στο σημείο $\Gamma(0,-3)$

Γ4.

$$\lim_{x\to 1}\frac{\sqrt{f(x)}-1}{x-1}=\lim_{x\to 1}\frac{\sqrt{x^2-x+1}-1}{x-1}=\lim_{x\to 1}\frac{\left(\sqrt{x^2-x+1}-1\right)\left(\sqrt{x^2-x+1}+1\right)}{(x-1)\left(\sqrt{x^2-x+1}+1\right)}$$

$$=\lim_{x\to 1}\frac{\left(\sqrt{x^2-x+1}\right)^2-1^2}{(x-1)\left(\sqrt{x^2-x+1}+1\right)}=\lim_{x\to 1}\frac{x^2-x+1-1}{(x-1)\left(\sqrt{x^2-x+1}+1\right)}=\lim_{x\to 1}\frac{x(x-1)}{(x-1)\left(\sqrt{x^2-x+1}+1\right)}$$

$$=\lim_{x\to 1}\frac{x}{\sqrt{x^2-x+1}+1}=\frac{1}{2}$$

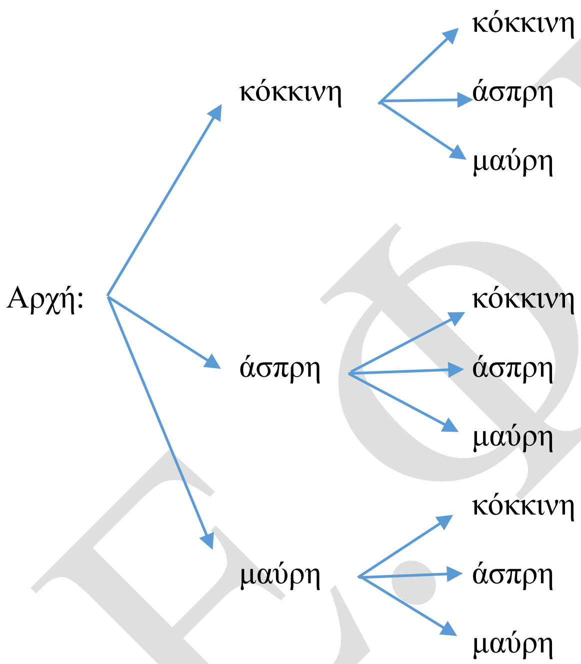
ΘΕΜΑ Δ

Δ1. Ορίζουμε τα παρακάτω ενδεχόμενα

α: Η μπάλα είναι άσπρη

μ: Η μπάλα είναι μαύρη

κ: Η μπάλα είναι κόκκινη



Ο δειγματικός χώρος του πειράματος είναι

$$\Omega = \{\alpha\alpha, \alpha\mu, \alpha\kappa, \mu\alpha, \mu\mu, \mu\kappa, \kappa\alpha, \kappa\mu, \kappa\kappa\}$$

Δ2. Τα ενδεχόμενα Α και Β με αναγραφή των στοιχείων τους είναι τα παρακάτω

$$A = \{\alpha\mu, \mu\mu, \kappa\mu\} \quad \text{και} \quad B = \{\alpha\kappa, \alpha\mu, \mu\alpha, \mu\kappa, \kappa\alpha, \kappa\mu\}$$

Δ3. Με βάση τα Δ1,Δ2 έχουμε $N(\Omega) = 9,\ N(A) = 3,\ N(B) = 6$

Υπολογίζουμε τις πιθανότητες των ενδεχομένων Α και Β

$$P(A) = \frac{N(A)}{N(\Omega)} \Leftrightarrow P(A) = \frac{3}{9} \Leftrightarrow P(A) = \frac{1}{3}$$

και

$$P(B)=\frac{N(B)}{N(\Omega)}\Leftrightarrow P(B)=\frac{6}{9}\Leftrightarrow P(B)=\frac{2}{3}$$

Για την πιθανότητα του ενδεχομένου Α΄ έχουμε :

$$P(A')=1-P(A)\Leftrightarrow P(A')=1-\frac{1}{3}\Leftrightarrow P(A')=\frac{2}{3}$$

Το ενδεχόμενο $A\cap B$ αποτελείται από τα κοινά στοιχεία των ενδεχομένων Α και Β επομένως

$$A\cap B=\{\alpha\mu,\kappa\mu\} \text{ με } N(A\cap B)=2$$

επομένως

$$P(A\cap B)=\frac{N(A\cap B)}{N(\Omega)}\Leftrightarrow P(A\cap B)=\frac{2}{9}$$

Για την πιθανότητα του ενδεχομένου $A-B$ έχουμε :

$$P(A-B)=P(A)-P(A\cap B)=\frac{3}{9}-\frac{2}{9}=\frac{1}{9}$$

Για την πιθανότητα του ενδεχομένου $B-A$ έχουμε :

$$P(B-A)=P(B)-P(A\cap B)=\frac{6}{9}-\frac{2}{9}=\frac{4}{9}$$

β. Εφόσον τα ενδεχόμενα A,Γ και B,Γ είναι ασυμβίβαστα το $\Gamma\subseteq(A\cup B)'$

άρα $P(\Gamma)\le P\left((A\cup B)'\right)$ επομένως η μεγαλύτερη τιμή του $P(\Gamma)$ είναι όταν :

$$P(\Gamma)=P\left((A\cup B)'\right)\Leftrightarrow P(\Gamma)=1-P(A\cup B)\Leftrightarrow P(\Gamma)=1-\big(P(A)+P(B)-P(A\cap B)\big)$$

$$\Leftrightarrow P(\Gamma)=1-\left(\frac{3}{9}+\frac{6}{9}-\frac{2}{9}\right)\Leftrightarrow P(\Gamma)=\frac{2}{9}$$